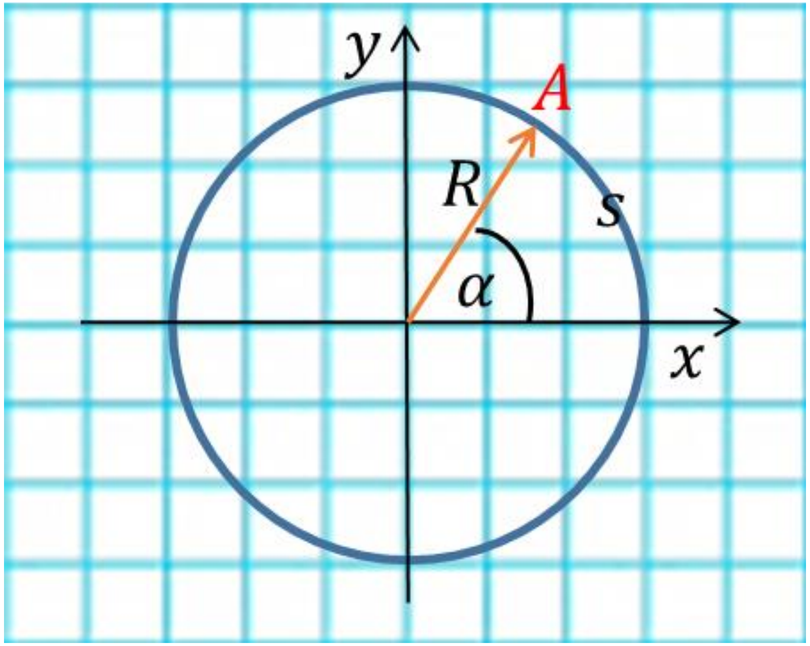
KINEMATYKA RUCHU OBROTOWEGO

Przesunięcie kątowe α – kąt określający położenie (kątowe) punktu A względem układu odniesienia

Z miary łukowej kąta, droga liniowa (s):

$$s = \alpha \cdot R$$

$$\alpha = \frac{s}{R}$$



Prędkość kątowa ω:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

Jednostką prędkości kątowej jest $[\frac{rad}{s}]$.

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d(\frac{s}{R})}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} \cdot V = \frac{V}{R}$$

Związek prędkości kątowej (częstości kątowej) z częstotliwością *f*:

$$\omega = 2\pi f$$

Jednostką częstotliwości jest [Hz]=[1/s]!

Przyspieszenie kątowe ε:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Jednostką przyspieszenia kątowego jest $[\frac{rad}{s^2}]$.

Analogie wielkości kinematycznych i równań w ruchu obrotowym i postępowym:

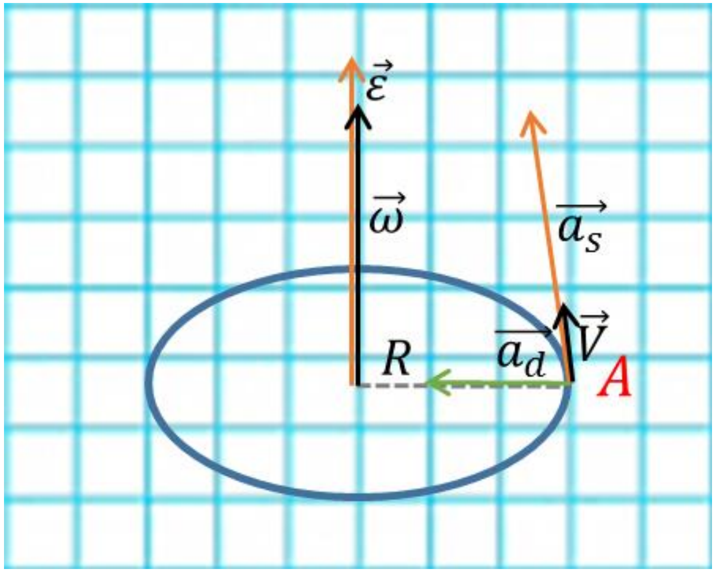
Ruch obrotowy	Ruch postępowy
Przemieszczenie kątowe α	Przemieszczenie liniowe s
Prędkość kątowa: $$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$	Prędkość liniowa: $$V = \frac{ds}{dt}$$
Przyspieszenie kątowe: $$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$	Przyspieszenie liniowe: $$a = \frac{dV}{dt}$$
Jeśli $\varepsilon = const$: $$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$$ $$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$$	Jeśli $a = const$: $$s = s_0 + V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$ $$V = V_0 + a \cdot t$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Jednostką przyspieszenia kątowego jest $[\frac{rad}{s^2}]$.

Prędkość kątowa i przyspieszenie kątowe są wektorami!

$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$
$\vec{\omega}$ prostopadłe do $\vec{R}$ $(\sin 90° = 1)$
$V = \omega \cdot R$



$\overrightarrow{a_s} = \vec{\varepsilon} \times \vec{R}$
$\vec{\varepsilon}$ prostopadłe do $\vec{R}$ $(\sin 90° = 1)$
$a_s = \varepsilon \cdot R$

$\overrightarrow{a_r} = \vec{\omega} \times \vec{V}$
$\vec{\omega}$ prostopadłe do $\vec{V}$ $(\sin 90° = 1)$
$a_r = \omega \cdot V$

DYNAMIKA RUCHU OBROTOWEGO

Moment siły – wielkość, która w ruchu obrotowym odgrywa rolę analogiczną do siły w ruchu postępowym, iloczyn wektorowy ramienia siły i siły

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{M}$ – moment siły,
$\vec{r}$ – ramie siły, wektor opisujący położenie punktu względem wybranego inercjalnego układu odniesienia.

$$M = r \cdot F \cdot sin\alpha$$

Moment pędu – wielkość, która w ruchu obrotowym odgrywa rolę analogiczną do pędu w ruchu postępowym, iloczyn wektorowy ramienia pędu i pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\vec{L}$ – moment pędu,
$\vec{r}$ – wektor opisujący położenie punktu względem wybranego inercjalnego układu odniesienia.

DYNAMIKA RUCHU OBROTOWEGO

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego – moment siły działający na punkt materialny powoduje zmianę momentu pędu tego ciała w czasie. Szybkość zmian momentu pędu jest równa momentowi siły działającemu na ciało.

$$\overrightarrow{M_{wyp}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

I zasada dynamiki dla ruchu obrotowego – ciało sztywne, na które nie działa moment siły pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem obrotowym jednostajnym.

III zasada dynamiki dla ruchu obrotowego – jeżeli dwa ciała oddziałują wzajemnie, to moment siły z jakim działa ciało drugie na ciało pierwsze jest równy i przeciwnie skierowany do momentu siły, z jakim ciało pierwsze działa na drugie.

ZACHOWANIE MOMENTU PĘDU

Jeżeli wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na układ jest równy zeru, to całkowity moment pędu układu pozostaje stały.

$$\overrightarrow{M_{wyp}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_i} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{L_i}\right) = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\overrightarrow{M_{wyp}} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

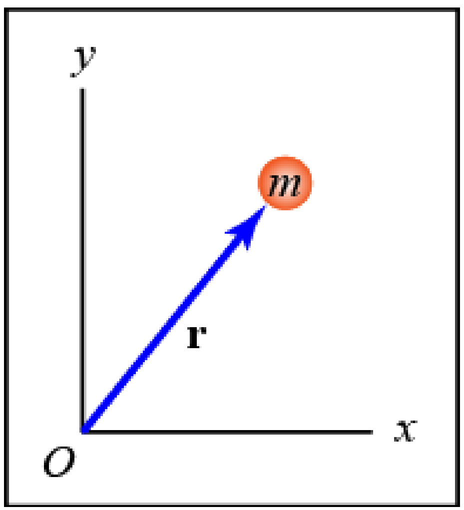
$$\vec{L} = const$$

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

Bryła sztywna – obiekt, w którym w czasie ruchu poszczególne punkty pozostają w stałych odległościach od siebie.

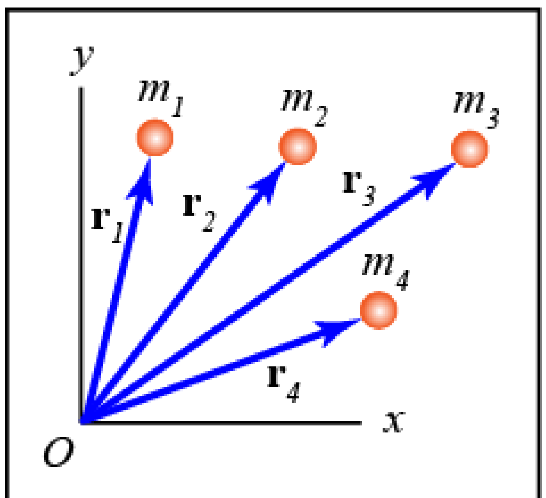
Moment bezwładności – miara bezwładności ciała w ruchu obrotowym względem określonej osi obrotu (im większy, tym trudniej zmienić ruch obrotowy ciała).

punkt materialny



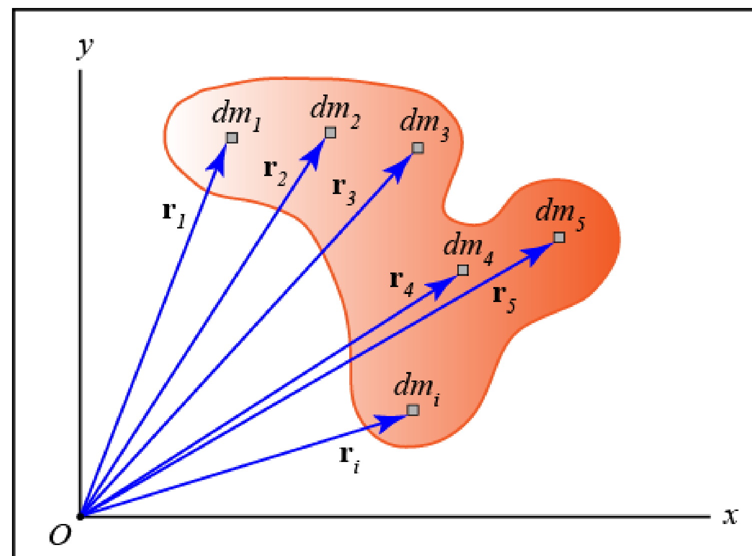
$$I = m \cdot r^2$$

układ punktów



$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot {r_i}^2$$

ciągły rozkład masy



$$I = \int r^2 dm$$

MOMENTY BEZWŁADNOŚCI WYBRANYCH BRYŁ

Bryła	Moment bezwładności
Obręcz o promieniu R (względem osi obręczy)	$I = MR^2$
Pierścień, rurka o promieniu zewnętrznym R_1 i wewnętrznym R_2 (względem osi pierścienia)	$I = \frac{M}{2}({R_1}^2 + {R_2}^2)$
Walec pełny o promieniu R (względem osi walca)	$I = \frac{M}{2}R^2$
Kula pełna o promieniu R (względem dowolnej średnicy)	$I = \frac{2}{5}MR^2$
Cienka powłoka sferyczna o promieniu R (względem dowolnej średnicy)	$I = \frac{2}{3}MR^2$
Obręcz o promieniu R (względem dowolnej średnicy)	$I = \frac{M}{2}R^2$
Obręcz o promieniu R (względem dowolnej linii stycznej)	$I = \frac{3}{2}MR^2$

Twierdzenie Steinera – pozwala obliczyć moment bezwładności dla osi obrotu, która jest równoległa do innej osi przechodzącej przez środek masy

$$I = I_0 + M \cdot a^2$$

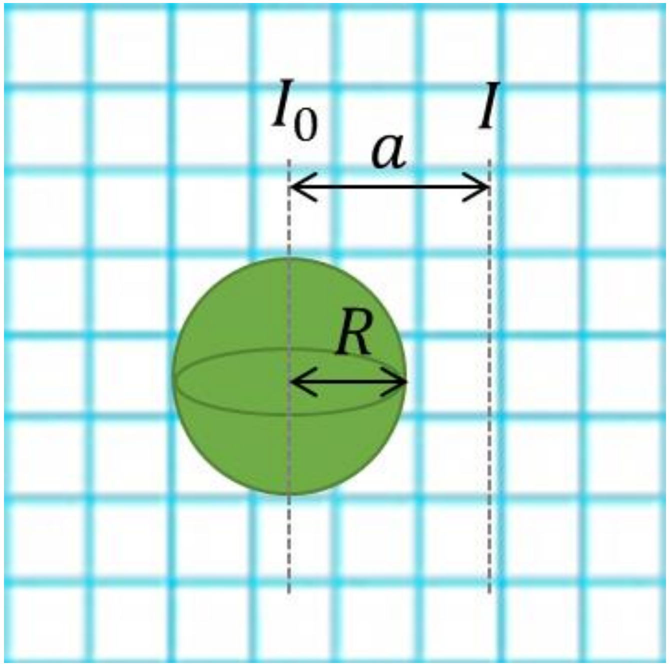
I_0 – moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy
I – moment bezwładności względem osi równoległej do niej i odległej od niej o a

Dla kuli z rysunku:

$$I = I_0 + M \cdot a^2$$

$$I_0 = \frac{2}{5} M R^2$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2 + M \cdot a^2$$



ZWIĄZEK MOMENTU PĘDU I MOMENT BEZWŁADNOŚCI

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

$\vec{L}$ – moment pędu
I – moment bezwładności bryły
$\vec{\omega}$ – prędkość kątowa

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$M_{wyp} = \frac{dL}{dt}$$

$$M_{wyp} = \frac{d}{dt}(I \cdot \omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I \cdot \varepsilon$$

Wypadkowy moment siły działający na bryłę sztywną powoduje pojawienie się przyspieszenia kątowego, które jest wprost proporcjonalne do momentu siły i odwrotnie proporcjonalne do momentu bezwładności bryły.

ENERGIA KINETYCZNA BRYŁY SZTYWNEJ

Ruch obrotowo-postępowy = toczenie:

$$E_k = E_{kp} + E_{ko}$$

E_{kp} – energia kinetyczna ruchu postępowego
E_{ko} – energia kinetyczna ruchu obrotowego

$$E_{kp} = \frac{1}{2} m \cdot V^2$$
$$E_{ko} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

Ruch postępowy (np. zsuwanie koralika po sznurku):

$$E_k = E_{kp}$$

Ruch obrotowy bryły sztywnej (np. obrót koralika na sznurku):

$$E_k = E_{ko}$$

Przykład:
Porównać całkowitą energię kinetyczną walca i kuli o masie m przy toczeniu się bez poślizgu po powierzchni płaskiej z prędkością V.

Walec:

$$E_{kp} = \frac{1}{2} m \cdot V^2$$

$$E_{ko} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} R^2 \cdot \left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{1}{4} m \cdot V^2$$

$$E_k = \frac{3}{4} m \cdot V^2$$

Kula:

$$E_{kp} = \frac{1}{2} m \cdot V^2$$

$$E_{ko} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2m}{5} R^2 \cdot \left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{2}{10} m \cdot V^2$$

$$E_k = \frac{7}{10} m \cdot V^2$$

Analogie wielkości i równań dynamicznych w ruchu obrotowym i postępowym:

Ruch obrotowy	Ruch postępowy
Moment bezwładności: $I = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot {r_i}^2$ $I = \int r^2 dm$	Masa: m
Energia kinetyczna: $E_{ko} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$	Energia kinetyczna: $E_{kp} = \frac{1}{2} m \cdot V^2$
Moment pędu: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $\vec{L} = I\vec{\omega}$	Pęd: $\vec{p} = m\vec{V}$
Moment siły: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	Siła: $\vec{F}$
Zasada zachowania momentu pędu: $\overrightarrow{M_{wyp}} = 0$ $\vec{L} = const$	Zasada zachowania pędu: $\overrightarrow{F_{wyp}} = 0$ $\vec{p} = const$

Analogie wielkości i równań dynamicznych w ruchu obrotowym i postępowym:

Ruch obrotowy	Ruch postępowy
I zasada dynamiki: $\overrightarrow{M_{wyp}} = 0$ $\vec{L} = const$ $\vec{\omega} = const$ II zasada dynamiki: $\overrightarrow{M_{wyp}} \neq 0$ $\overrightarrow{M_{wyp}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\varepsilon}$	I zasada dynamiki: $\overrightarrow{F_{wyp}} = 0$ $\vec{p} = const$ $\vec{V} = const$ II zasada dynamiki: $\overrightarrow{F_{wyp}} \neq 0$ $\overrightarrow{F_{wyp}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$

Przykład 1:
Przez blok ruchomy (nieruchomy) o momencie bezwładności I i promieniu R, przerzucono nić i na jej końcach umieszczono dwa ciężarki o masach m_1 i m_2. Jakie będą siły napięcia nici N_1 i N_2 po obu stronach bloku, jeżeli układ ciężarków zacznie poruszać się pod wpływem siły ciężkości. Wyznaczyć przyspieszenie mas.

Dla ruchomego bloku:

$$M = I \cdot \varepsilon = I \cdot \frac{a}{R}$$

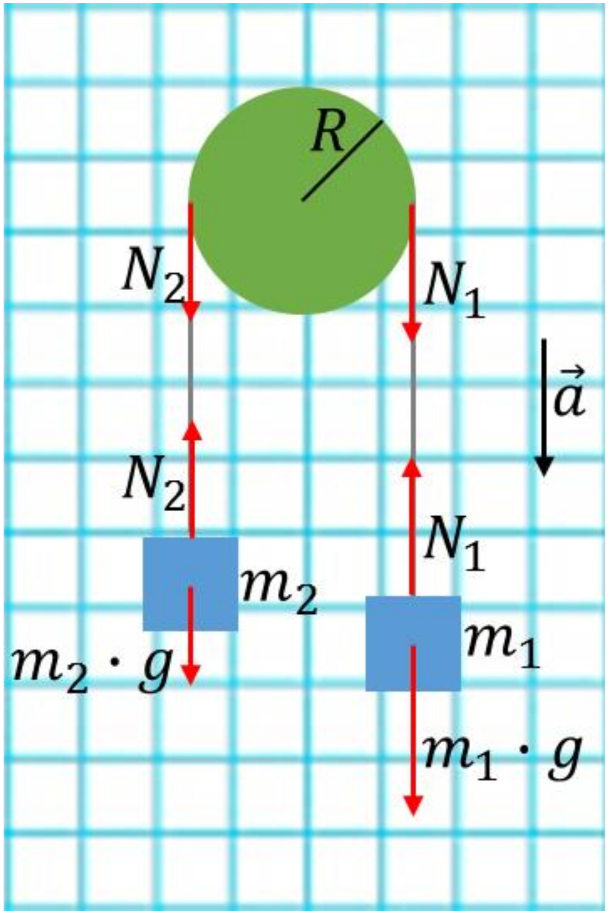
$$M = M_1 - M_2 = R \cdot N_1 - R \cdot N_2 = R(N_1 - N_2)$$

$$I \cdot \frac{a}{R} = R(N_1 - N_2)$$

$$\begin{cases} I \cdot \dfrac{a}{R^2} = N_1 - N_2 \\ m_1 \cdot a = m_1 \cdot g - N_1 \\ m_2 \cdot a = N_2 - m_2 \cdot g \end{cases}$$

$$I \cdot \frac{a}{R^2} + m_1 \cdot a + m_2 \cdot a = m_1 \cdot g - m_2 \cdot g$$

$$\left(\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2\right) \cdot a = (m_1 - m_2) \cdot g$$



$$a = \frac{(m_1 - m_2) \cdot g}{\left(\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2\right)}$$

$$N_1 = m_1 \cdot (g - a) = m_1 \cdot \left(g - \frac{(m_1 - m_2) \cdot g}{\left(\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2\right)}\right)$$

$$N_1 = m_1 \cdot g\left(1 - \frac{(m_1 - m_2)}{\left(\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2\right)}\right) = m_1 \cdot g\left(\frac{\frac{I}{R^2} + 2m_2}{\left(\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2\right)}\right)$$

$$N_2 = m_2 \cdot (g + a) = m_2 \cdot \left(g + \frac{(m_1 - m_2) \cdot g}{\left(\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2\right)}\right)$$

$$N_2 = m_2 \cdot g\left(1 + \frac{(m_1 - m_2)}{\left(\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2\right)}\right) = m_2 \cdot g\left(\frac{\frac{I}{R^2} + 2m_1}{\left(\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2\right)}\right)$$

Jeśli blok ruchomy jest walcem o masie M i promieniu R, to:

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2) \cdot g}{\left(\frac{\frac{1}{2} M R^2}{R^2} + m_1 + m_2 \right)} = \frac{(m_1 - m_2) \cdot g}{\left(\frac{1}{2} M + m_1 + m_2 \right)}$$

$$N_1 = m_1 \cdot g \left(\frac{\frac{I}{R^2} + 2m_2}{\left(\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2 \right)} \right) = m_1 \cdot g \left(\frac{\frac{1}{2} M + 2m_2}{\left(\frac{1}{2} M + m_1 + m_2 \right)} \right)$$

$$N_2 = m_2 \cdot g \left(\frac{\frac{1}{2} M + 2m_1}{\left(\frac{1}{2} M + m_1 + m_2 \right)} \right)$$

Dla nieruchomego bloku (bloku o zaniedbywalnej masie):

$$\begin{cases} N_1 = N_2 = N \\ m_1 \cdot a = m_1 \cdot g - N \\ m_2 \cdot a = N - m_2 \cdot g \end{cases}$$

$$m_1 \cdot a + m_2 \cdot a = m_1 \cdot g - m_2 \cdot g$$

$$(m_1 + m_2) \cdot a = (m_1 - m_2) \cdot g$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2) \cdot g}{(m_1 + m_2)}$$

$$N = m_1 \cdot (g - a) = m_1 \cdot \left(g - \frac{(m_1 - m_2) \cdot g}{(m_1 + m_2)} \right) = m_1 \cdot g \left(1 - \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \right)$$

$$N = m_1 \cdot g \left(1 - \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \right) = m_1 \cdot g \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)}$$

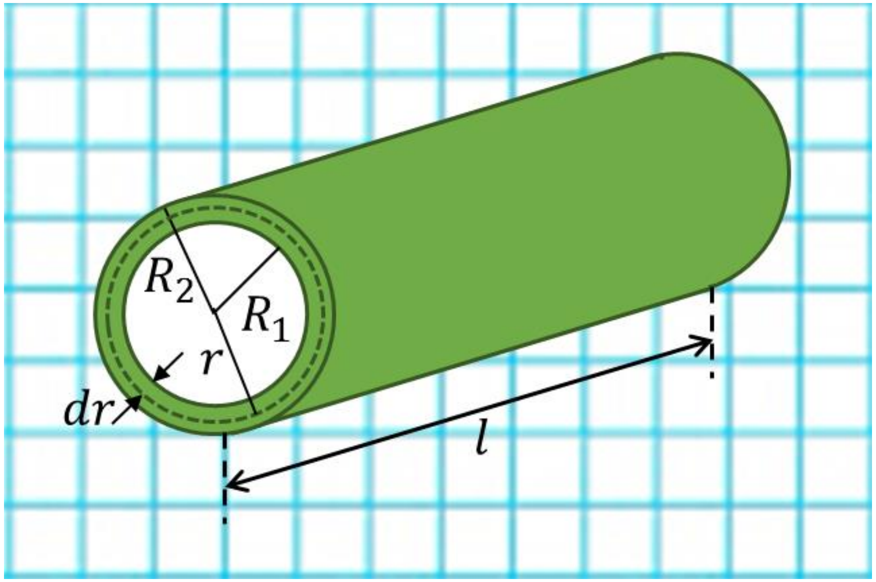
Przykład 2:
Obliczyć moment bezwładności rury o przekroju kołowym względem jej osi. Długość rury wynosi l, promień wewnętrzny R_1, zewnętrzny R_2, gęstość materiału ρ.

$$I = \int_{R_1}^{R_2} r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho dV = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho 2\pi r dr l = 2\pi\rho l \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$$

$$I = 2\pi\rho l \frac{r^4}{4}\Bigg|_{R_1}^{R_2} = 2\pi\rho l \left(\frac{{R_2}^4}{4} - \frac{{R_1}^4}{4}\right)$$

$$I = \frac{2\pi\rho l}{4}\left({R_2}^4 - {R_1}^4\right) = \frac{\pi\rho l}{2}\left({R_2}^4 - {R_1}^4\right)$$

$$I = \frac{\pi\rho l}{2}\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)\left({R_2}^2 + {R_1}^2\right)$$



$$I = \frac{\pi \rho l}{2}\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)\left({R_2}^2 + {R_1}^2\right) = \frac{1}{2}\pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)l\rho\left({R_2}^2 + {R_1}^2\right)$$

$$I = \frac{1}{2}V\rho\left({R_2}^2 + {R_1}^2\right) = \frac{1}{2}m\left({R_2}^2 + {R_1}^2\right)$$